Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

09/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 160 min + 10 (consegna online)

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un foglio A4 con degli appunti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco e caricarli in ordine nell'apposita sezione della pagina moodle del corso. Chiamare i file come segue: "CognomeNome1", "CognomeNome2", ...
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

09/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 160 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (8 punti)

1.1 Calcolare l'integrale generale di $3y'' + 2y' - y = 2\mathrm{e}^{-x} + 8x$.

1.2 Trovare la soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = -14$ e $y'(0) = -\frac{17}{2}$. Determinarne il dominio e verificare che la soluzione sia di classe $\mathcal{C}^2$.

Problema 2 (6 punti)

Considerare l'arco di curva γ determinato dalla seguente parametrizzazione:
$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(2t), 2t - \sin(2t))$ con $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

2.2 Scrivere un'equazione parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

2.3 Calcolare la lunghezza di γ.

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = 4\log(x^2 + y^2) - y^2$

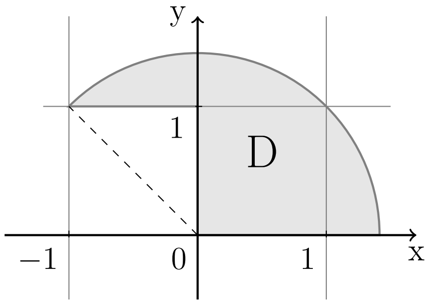
3.1 Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$ (non è richiesto uno studio di funzione dettagliato).

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella usando il test dell'Hessiana.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $P = (1, 1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (7 punti)

4.1 Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (la curva alla frontiera di D è un arco di circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$).



Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

09/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 160 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (8 punti)

1.1 (5 punti) Calcolare l'integrale generale di $3y'' + 2y' - y = 2\mathrm{e}^{-x} + 8x$.

L'eq. caratteristica dell'eq. omogenea associata è (2 punti): $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = +\frac{1}{3}$. Quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono:

$$z(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Per trovare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza, notando che e^{-x} è soluzione dell'omogenea associata:

$$\bar{y}(x) = C_1 x\mathrm{e}^{-x} + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Sostituendo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -4C_1 = 2 \\ -C_2 = 8 \\ 2C_2 - C_3 = 0 \end{cases} \implies C_1 = -\frac{1}{2}; C_2 = -8; C_3 = -16$$

L'integrale generale quindi è (3 punti):

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x} - 8x - 16, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

1.2 (3 punti) Trovare la soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = -14$ e $y'(0) = -\frac{17}{2}$. Determinarne il dominio e verificare che la soluzione sia di classe $\mathcal{C}^2$.

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + \frac{1}{3}B = 0 \end{cases} \implies A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è (2 punti):

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x} - 8x - 16, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Il dominio è $\mathbb{R}$ e la soluzione è $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (1 punto).

Problema 2 (6 punti)

Considerare l'arco di curva γ determinato dalla seguente parametrizzazione:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(2t), 2t - \sin(2t)) \quad , \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

2.1 (2 punti) Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

Imponendo $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ si ottiene la condizione $\cos(2t_1) = \cos(2t_2)$ che nel dominio è verificata solo se $t_1 = t_2$. Quindi γ è semplice e non è chiusa.

Il vettore tangente è $\mathbf{r}'(t) = (2\sin(2t), 2 - 2\cos(2t))$ e la sua norma è $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8 - 8\cos(2t)}$.

$|\mathbf{r}'(t)| = 0$ per $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che sono punti esterni al dominio. Quindi nel dominio $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ la parametrizzazione $r(t)$ è regolare.

2.2 (2 punti) Scrivere un'equazione parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Si ha $\mathbf{r}(\frac{\pi}{3}) = (\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{3}) = (\sqrt{3}, 3)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2} + \sqrt{3}(t - \frac{\pi}{3}) \\ y(t) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 3(t - \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

2.3 (2 punti) Calcolare la lunghezza di γ.

$$l(\gamma) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{8 - 8\cos(2t)}\, dt = 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(t)\, dt = 2\sqrt{2}$$

dove si è usato la relazione $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = 4\log(x^2 + y^2) - y^2$

3.1 (3 punti) Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

Il dominio di f è $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e la funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ in quanto composizione e somma di funzione di classe $\mathcal{C}^2$ (anche $\mathcal{C}^\infty$).

Le due sezioni sono mostrate nelle figure 1 e 2

3.2 (4 punti) Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{8x}{x^2+y^2} \\ \frac{8y}{x^2+y^2} - 2y \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)^T$ si ottengono i punti critici $P_1 = (0, 2)$ e $P_2 = (0, -2)$

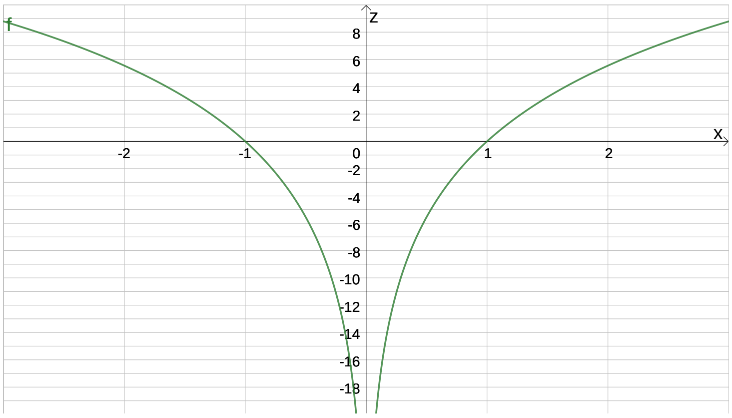


Figura 1: Sezione y=0

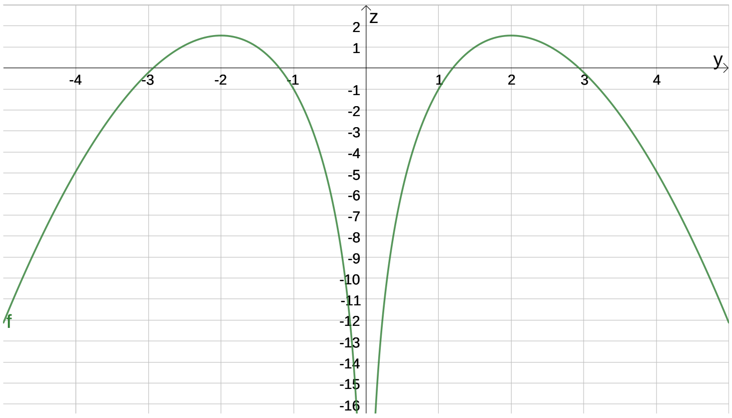


Figura 2: Sezione x=0

La matrice Hessiana in un punto (x, y) è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{8(x^2+y^2)-16x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-16xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-16xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{8(x^2+y^2)-16y^2}{(x^2+y^2)^2} - 2 \end{pmatrix}$$

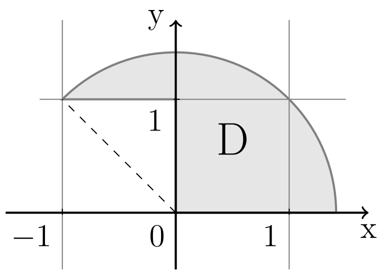
che calcolata nei punti P_1 e P_2 diventa $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Il determinante di tale matrice è -8, quindi in entrambi i punti la matrice non è definita. Ne segue che P_1 e P_2 sono punti di sella.

3.3 (2 punti) Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1, 1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Il versore di massima crescita corrisponde al gradiente calcolato in $(1, 1)$ e normalizzato: $\nabla f(1, 1) = (4, 2)$ che ha norma $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Quindi $\mathbf{v} = (\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$.

Il piano tangente ha equazione $z = 4(x - 1) + 2(y - 1) + 4\log(2) - 1$.

Problema 4 (7 punti)



4.1 Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (la curva alla frontiera di D è un arco di circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$).

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \setminus D_2$ con:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta),\ 0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, -x \leq y \leq 1\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy - \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_0^{3\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{3}{4}\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_x^1 1\,dy\right) dx = \frac{1}{2}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}$ (1 punto).

Per il calcolo del baricentro si calcolano $\int\int_D x\,dx\,dy$ e $\int\int_D y\,dx\,dy$:

Coordinata x_c:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} x\,dx\,dy &= \int_0^{3\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos(\theta)\,d\rho\right)\,d\theta = \\ &= \left(\int_0^{3\pi/4}\cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\right) = \\ &= [\sin(\theta)]_0^{3\pi/4}\left[\rho^3/3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{1} x\,dy\right)\,dx = \\ &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_{-x}^{1}\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Quindi la coordinata x del baricentro è (3 punti): $x_C = (\frac{2}{3}+\frac{1}{6})/(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}) = \frac{10}{9\pi-6} \approx 0.44$

Coordinata y_c:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} y\,dx\,dy = \int_0^{3\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sin(\theta)\,d\rho\right)\,d\theta = \left(\int_0^{3\pi/4}\sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\right) = \\ = [-\cos(\theta)]_0^{3\pi/4}\left[\rho^3/3\right]_0^{\sqrt{2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2}+1)\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}+2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} y\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{1} y\,dy\right)\,dx == \int_{-1}^{0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{1}\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\,dx = \\ = \left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Quindi la coordinata y del baricentro è (3 punti): $y_C = \left(\frac{2\sqrt{2}+2}{3}-\frac{1}{3}\right)\frac{4}{3\pi-2} = \frac{8\sqrt{2}+4}{9\pi-6} \approx 0.69$

Problema 4 (7 punti) - Altra soluzione

Il dominio D si può pensare anche come $D = D_3 \cup D_4$ con:

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, 1 \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$$
$$D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{2}, 0 \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_3} dx\,dy + \int\int_{D_4} dx\,dy$.

$$\begin{aligned}\int\int_{D_3} dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_1^{\sqrt{2-x^2}} 1\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0} [y]_1^{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \\ &= \int_{-1}^{0} \sqrt{2-x^2} - 1\,dx = \int_{3\pi/4}^{\pi/2} 2\sin^2 t\,dt - [x]_{-1}^{0} = \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} 1-\cos(2t)\,dt - 1 = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dove si è usato il cambio di variabili $t = \sqrt{2}\cos(t)$ e la formula $2\sin^2(t) = 1-\cos(2t)$.
Notare che D_4 è un quarto di cerchio di raggio $\sqrt{2}$. Quindi D_4 si può esprimere facilmente in coordinate polari centrate nell'origine con $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$ e

$$0 \le \rho \le \sqrt{2} \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$\int\int_{D_4} dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho\right)d\theta = \frac{1}{2}\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\pi$$

Quindi l'area di D vale $\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}$ (1 punto).
Per il calcolo del baricentro si calcolano $\int\int_D x\,dx\,dy$ e $\int\int_D y\,dx\,dy$.
Coordinata x_c:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_3} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_1^{\sqrt{2-x^2}} x\,dy\right)dx = \\ &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_1^{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} x\sqrt{2-x^2} - x)\,dx = \\ &= \left[-\frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_4} x\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos(\theta)\,d\rho\right)d\theta = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\right) = \\ &= [\sin(\theta)]_0^{\pi/2}\,[\rho^3/3]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Quindi la coordinata x del baricentro è (3 punti): $x_C = (\frac{5}{6})/(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}) = \frac{10}{9\pi-6} \approx 0.44$
Coordinata y_c:

$$\int\int_{D_3} y\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\right)dx == \int_{-1}^{0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1}^{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{2-x^2}{2} - \frac{1}{2}\,dx =$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Per simmetria, $\int\int_{D_4} x\,dx\,dy = \int\int_{D_4} y\,dx\,dy$. Verifica:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_4} y\,dx\,dy &= \int_{0}^{\pi/2}\left(\int_{0}^{\sqrt{2}} \rho^2\sin(\theta)\,d\rho\right)d\theta = \\ &= \left(\int_{0}^{\pi/2}\sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_{0}^{\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\right) = \\ &= [-\cos(\theta)]_{0}^{\pi/2}\left[\rho^3/3\right]_{0}^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Quindi la coordinata y del baricentro è (3 punti): $y_C = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\right)\frac{4}{3\pi-2} = \frac{8\sqrt{2}+4}{9\pi-6} \approx 0.69$